Т е о р е м а 2. Поверхность (P), ассоциированная с с расслояемой конгруэнцией $(CP)_{1,2}$, является коинцидентной поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Находя директрису Вильчинского, ось Чеха и ребро Грина поверхности (P), ассоциированной с расслояемой конгруэнцией $(CP)_{1,2}$, убеждаемся, что все эти замечательные прямые совпадают между собой и определяются точками A_4 и $S=2\lambda E^{*}_{12}+A_3$.

Следовательно, канонический пучок поверхности (P) вырождается в прямую A_4S, а сама поверхность (P) является коинцидентной.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

2. Скрыдлова Е.В. Об одном классе вырожденных конгруэнций квадратичных пар.-В кн.:Украинский геометрический сборник. Вып.18, Харьков, 1975, с.126-135.

3. Фиников С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.-"Уч.зап.Моск. пед .ин -та", 1951, №16, вып.3, с.235-260.

4. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр. геом. семинара. Всес.ин-т научн. и технич. информации", 1974, 6, с.113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.П. С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОИДОВ С ФОКАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ ЭЛЛИПСОВ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассмотрена конгруэнция V_2 эллипсоидов, имеющая фокальную конгруэнцию эллипсов [1], но не являющаяся конгруэнцией V_2° [2]. Доказана теорема существования и установлены некоторые геометрические свойства таких конгруэнций. Для конгруэнций одного класса получено безынтегральное представление.

§1. Теорема существования

О п р е д е л е н и е 1.1. Конгруэнцией V_2 называется конгруэнция эллипсоидов в A_3, обладающая следующими свойствами: 1/ каждый эллипсоид $Q\in V_2$ содержит в качестве фокального многообразия эллипс C, центр A которого не совпадает с центром B эллипсоида Q; 2/ плоскости эллипсов C образуют двупараметрическое семейство, причем характеристическая точка M плоскости эллипса C не совпадает с его центром A и не принадлежит квадрике Q.

О п р е д е л е н и е 1.2. Конгруэнцией V_2^1 называется конгруэнция V_2 с невырожденной индикатрисой векторов $\overline{AB}$. Конгруэнцией V_2^2 называется конгруэнция V_2 с вырождающейся индикатрисой векторов $\overline{AB}$.

Т е о р е м а 1.1. Существуют два и только два непересекающихся класса конгруэнций V_2 конгруэнции V_2^1 и V_2^2, определяемые с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем конгруэнцию V_2 к каноническому реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_3=\overline{AB}$, концы векторов $\bar{e}_i$ $(i,j,\kappa=1,2)$ расположены на эллипсе C, причем векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ сопряжены относительно эллипса C и вектор $\bar{e}_1$ направлен по прямой AM. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha,\quad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3),$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\gamma\wedge\omega_\gamma^\alpha,\quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta.$$

Уравнения эллипсоида Q и эллипса C запишутся соответственно в виде

$$F\equiv(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-2x^3-1=0,\qquad (1.1)$$

$$f\equiv(x^1)^2+(x^2)^2-1=0.\qquad (1.2)$$

Так как каждая точка эллипса C является фокальной точкой эллипсоида Q конгруэнции V_2^1, то

$$dF|_{x^3=0}=\mu f.\qquad (1.3)$$

Система Пфаффовых уравнений конгруэнции V_2^1 приводится к виду:

$$\omega^3+\lambda\omega_1=0,\quad \omega_1^1=\omega_2^2,\quad \omega_1^2+\omega_2^1=0,\quad \omega^3=\omega_1^3,\quad \omega^i=\omega_i\qquad (1.4)$$

$$\omega_1^2=a^\kappa\omega_\kappa,\qquad (1.5)$$

$$\omega_3^i=\alpha\omega_i,\quad \omega_3^3=\lambda(\alpha-2)\omega_1,\quad \text{где}\quad d\alpha=2\alpha\lambda(\alpha-1)\omega_1,\qquad (1.6)$$

$$\omega_i\overset{def}{=}\omega_i^3,\quad \lambda^2\neq 1.\qquad (1.7)$$

Из (I.7) и формулы

$$d\bar{e}_3=\alpha(\omega_1\bar{e}_1+\omega_2\bar{e}_2)+\lambda(\alpha-2)\omega_1\bar{e}_3\qquad (1.8)$$

следует, что конгруэнции V_2^1 характеризуются неравенством

$$\alpha(\alpha+1)\neq 0,\qquad (1.9)$$

а конгруэнции V_2^2 соотношением

$$\alpha=0.\qquad (1.10)$$

Замкнутая система уравнений конгруэнции V_2^1 состоит из пфаффовых уравнений (I.4),(I.5),(I.6) и квадратичных уравнений

$$d\lambda\wedge\omega_1+\lambda a^1\omega_1\wedge\omega_2=0,\quad da^\kappa\wedge\omega_\kappa+A\omega_1\wedge\omega_2=0,\qquad (1.11)$$

где

$$A=(a^1)^2+(a^2)^2-\lambda a^2(\alpha-1)-\alpha.\qquad (1.2)$$

Замкнутая система уравнений конгруэнции V_2^2 состоит из пфаффовых уравнений (I.4),(I.5), уравнений

$$\omega_3^i=0,\quad \omega_3^3+2\omega^3=0\qquad (1.13)$$

и квадратичных уравнений

$$d\lambda\wedge\omega_1+\lambda a^1\omega_1\wedge\omega_2=0,\ da^\kappa\wedge\omega_\kappa+\left((a^1)^2+(a^2)^2+\lambda a^2\right)\omega_1\wedge\omega_2=0.\qquad (1.14)$$

Следовательно, конгруэнции V_2^1 и V_2^2 существуют и каждая определяется с произволом одной функции двух аргументов.

§ 2. Конгруэнции V_2^1

Анализируя уравнения (I.4),(I,6),(I.II), убеждаемся, что конгруэнции V_2^1 обладают следующими свойствами: I/Торсы прямолинейных конгруэнций (AM), $(A\bar{e}_2)$ соответствуют координатным линиям $\omega_1=0$. 2/Касательная плоскость к поверхности (B) коллинеарна вектору $\bar{e}_2$. 3/Вдоль линий $\omega_1=0$ инвариант α постоянен. 4/Прямолинейная конгруэнция (AB) вырождается в связку прямых с центром в точке

$$\bar{P}=\bar{A}-\frac{1}{\alpha}\bar{e}_3.\qquad (2.1)$$

Докажем, например, свойство 4. Имеем:

$$d\bar{P}=0.$$

Следовательно, P - инвариантная точка пространства, причем $P\in AB$.

Т е о р е м а 2.I. Все квадрики Q конгруэнции V_2^1 касаются вдоль коники C инвариантной квадрики Q_o.

$$\Phi \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - \alpha (x^3)^2 - 2x^3 - 1 = 0 \qquad (2.3)$$

с центром в точке P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$d\Phi = 2\lambda \omega_1 \Phi.$$

Следовательно, Q_o инвариантная квадрика. Из уравнений (I.I) и (2.3) видно, что квадрики Q_o и Q касаются друг друга вдоль коники C и что P —центр квадрики Q_o.

Т е о р е м а 2.2. Точка A является серединой отрезка BB^*, где B^*—полюс плоскости коники C относительно квадрики Q_o.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$\bar{B}^* = \bar{A} - \bar{e}_3, \quad \bar{B} = \bar{A} + \bar{e}_3.$$

Следовательно, точка A является серединой отрезка BB^*.

§ 3. Конгруэнции V_2^2

Т е о р е м а 3.I. Конгруэнции допускают следующее безынтегральное представление: возьмем произвольную гладкую поверхность (M) (одна функция двух аргументов) и эллиптический параболоид Π (восемь параметров). Пусть C -эллипс, являющийся сечением эллиптического параболоида Π касательной плоскостью к поверхности (M) в точке M, B^* -полюс плоскости эллипса C относительно Π, B -точка, аффинно-симметричная точке B^* относительно центра A эллипса C, Q -эллипсоид с центром в точке B, касающийся эллиптического параболоида Π вдоль C. Тогда конгруэнция эллипсоидов есть конгруэнция V_2^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Все квадрики Q конгруэнции V_2^2 касаются инвариантного параболоида Π

$$\Phi_o \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^3 - 1 = 0 \qquad (3.1)$$

вдоль эллипса C, причем центр A эллипса C является серединой отрезка BB^*, где B -центр эллипсоида Q, а B^*—полюс плоскости эллипса C (касательной плоскости к характеристической поверхности M) относительно эллиптического параболоида Π.

2/Отнесем конгруэнцию Q, указанную в теореме 3.I, к реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, где A —центр эллипса C, $\bar{e}_1$, направлен по прямой AM, $\bar{e}_2$ расположен в плоскости эллипса C и сопряжен вектору $\bar{e}_1$, концы векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ расположены на эллиптическом параболоиде Π, а вектор $\bar{e}_3$ совмещен с вектором $\overline{AB}$. Тогда уравнения эллиптического параболоида Π и эллипсоида Q запишутся соответственно в виде (3.I), (I.I). Уравнение поверхности (M) имеет вид:

$$\omega^3 + \lambda\omega_1 = 0. \qquad (3.2)$$

Условие инвариантности эллиптического параболоида Π $d\Phi_o = \mu\Phi_o$ приводит вместе с уравнением (3.2) к системе пфаффовых уравнений (I.4), (I.5), (I.I3), определяющих конгруэнцию V_2^2.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, I976, с.54-60.

2. Сопина Е.П. Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, I976, с.I05-II0.